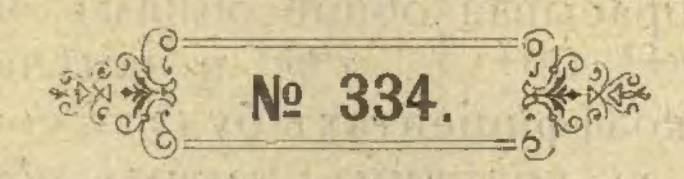
XXVIII Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

30 Ноября  № 334. 1902 г.

Вычисленіе суммъ одинаковыхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда.

М. Зимина въ Варшавѣ.

§ 1. Подразумѣвая подъ m и x цѣлыя и положительныя числа, будемъ обозначать черезъ $S_m(x)$ сумму

$$1^m+2^m+\ldots+x^m.$$

Обычный элементарный пріемъ вычисленія суммы $S_m(x)$ состоитъ въ слѣдующемъ. Возьмемъ рядъ тождествъ:

$$2^{m+1}=(1+1)^{m+1}=1^{m+1}+\frac{m+1}{1}1^m+\frac{(m+1)m}{1.2}1^{m-1}+$$

$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}1^{m-2}+\ldots+(m+1)1+1$$

$$3^{m+1}=(2+1)^{m+1}=2^{m+1}+\frac{m+1}{1}2^m+\frac{(m+1)m}{1.2}2^{m-1}+$$

$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}2^{m-2}+\ldots+(m+1)2+1$$

. . . .

. . . .

$$(x+1)^{m+1}=x^{m+1}+\frac{m+1}{1}x^m+\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}+$$

$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}+....+(m+1)x+1$$

и сложимъ ихъ. Отбрасывая общіе обѣимъ частямъ полученнаго равенства члены: 2^{m+1}, 3^{m+1}, ..., x^{m+1} и замѣчая, что множителями при биноміальныхъ коэффиціентахъ будутъ соотвѣтственно суммы: $S_m(x)$, $S_{m-1}(x)$, ..., $S_1(x)$, получимъ, такимъ образомъ, равенство:

$$(x+1)^{m+1}=1+\frac{m+1}{1}S_m(x)+\frac{(m+1)m}{1.2}S_{m-1}(x)+$$

$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}S_{m-2}(x)+....+(m+1)S_1(x)+x,$$

изъ котораго

$$S_m(x)=\frac{1}{m+1}(x+1)^{m+1}-\frac{1}{m+1}(x+1)-\frac{m}{1.2}S_{m-1}(x)-$$

$$-\frac{m(m-1)}{1.2.3}S_{m-2}(x)-....-S_1(x). \qquad (1)$$

Пользуясь послѣдней формулой, можемъ вычислить $S_m(x)$, если извѣстны суммы $S_{m-1}(x)$, $S_{m-2}(x)$ .... и т. д. до $S_1(x)$.

Но

$$S_1(x)=1+2+...+x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x, \qquad (2)$$

и полагая въ (1) $m=2$, найдемъ

$$S_2(x)=\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{3}(x+1)-S_1(x)=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x. \qquad (3)$$

Полагая въ той же формулѣ (1) $m=3$ и пользуясь найденными выраженіями для $S_1(x)$ и $S_2(x)$, опредѣлимъ $S_3(x)$

$$S_3(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2 \qquad (4)$$

и т. д.

Изложенный способъ для опредѣленія суммы $S_m(x)$ требуетъ знанія всѣхъ предшествующихъ суммъ отъ $S_{m-1}(x)$ до $S_1(x)$. Мы теперь покажемъ, какъ можно непосредственно опредѣлить сумму $S_m(x)$, а также, какъ опредѣлить ту же сумму по данной лишь суммѣ $S_{m-1}(x)$, отнюдь не пользуясь значеніями другихъ суммъ съ меньшими показателями.

§ 2. Изъ формулъ (2), (3), (4) видно, что суммы $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ выражаются цѣлыми многочленами отъ x, не содержащими постояннаго члена, при чемъ степени ихъ на единицу больше соотвѣтствующихъ индексовъ при S. Не трудно показать, что тѣми же свойствами должна обладать сумма $S_m(x)$ съ какимъ—угодно индексомъ m. Для доказательства допустимъ, что суммы $S_1(x)$, $S_2(x)$, ... до $S_{m-1}(x)$ включительно обладаютъ указанными свойствами. Тогда, обращаясь къ формулѣ (1), заключаемъ, что

1) $S_m(x)$ представляется, какъ цѣлый многочленъ отъ x.

2) Этотъ многочленъ не содержитъ члена, свободнаго отъ x. Дѣйствительно, такого члена нѣтъ, по условію, въ выраженіяхъ суммъ $S_{m-1}(x)$, ..., $S_1(x)$, а также его не будетъ, по раскрытіи скобокъ и приведеніи, въ выраженіи

$$\frac{1}{m+1}(x+1)^{m+1} - \frac{1}{m+1}(x+1),$$

въ которомъ два свободные отъ x члена $\frac{1}{m+1}$ и $-\frac{1}{m+1}$ уничтожаются. Наконецъ,

3) степень этого многочлена равна $m+1$, т. е. на единицу больше индекса при S. Дѣйствительно, биномъ $\frac{1}{m+1}(x+1)^{m+1}$ доставитъ членъ $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, а такъ какъ, по предположенію, $S_{m-1}(x)$, ..., $S_1(x)$ суть многочлены соотвѣтственно степеней m, ... , 2, то членъ $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, не имѣя себѣ подобныхъ, непремѣнно войдетъ въ выраженіе для $S_m(x)$.

Какъ мы уже видѣли непосредственно, многочлены, выражающіе $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, обладаютъ тремя указанными свойствами. По индукціи заключаемъ, что эти свойства принадлежатъ какой—угодно суммѣ $S_m(x)$, что и хотѣли показать.

§ 3. Зная теперь видъ выраженія $S_m(x)$, можемъ найти послѣднее по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Съ этою цѣлью положимъ

$$S_m(x) = A_1 x^{m+1} + A_2 x^m + A_3 x^{m-1} + \dots \\ \dots + A_i x^{m-i+2} + \dots + A_m x^2 + A_{m+1} x, \qquad (5)$$

гдѣ A_1, A_2, ..., A_{m+1} неизвѣстные пока, подлежащіе опредѣленію коэффиціенты. Очевидно, что, если изъ суммы $S_m(x)$, т. е. $1^m + 2^m + \dots + x^m$ вычтемъ сумму $S_m(x-1)$, т. е. $1^m + 2^m + \dots + (x-1)^m$, то получимъ x^m, иначе

$$S_m(x) - S_m(x-1) = x^m, \qquad (6)$$

каковое равенство должно имѣть мѣсто при всякомъ цѣломъ x, бо́льшемъ единицы. По формулѣ (5)

$$S_m(x-1) = A_1(x-1)^{m+1} + A_2(x-1)^m + A_3(x-1)^{m-1} + \dots \\ \dots + A_i(x-1)^{m-i+2} + \dots + A_m(x-1)^2 + A_{m+1}(x-1),$$

или, прилагая формулу бинома:

$$S_m(x-1) =$$

$$= A_1 x^{m+1} - \frac{m+1}{1} A_1 x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} A_1 x^{m-1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} A_1 x^{m-2} + \ldots$$

$$+ A_2 x^m - \frac{m}{1} A_2 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} - \ldots$$

$$+ A_3 x^{m-1} - \frac{m-1}{1} A_3 x^{m-2} + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пользуясь этимъ выраженіемъ и (5), составимъ разность $S_m(x)$
Такимъ образомъ, получимъ:

$$\frac{m+1}{1} A_1 x^m - \left\{\frac{(m+1)m}{1.2} A_1 - \frac{m}{1} A_2\right\} x^{m-1} - \left\{- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\right.$$

$$- \left\{(-1)^i \frac{(m+1)m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots i} A_i + (-1)^{i-1} \frac{m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-1)} A_2\right.$$

$$- \ldots - \{(-1)^m (m+1) A_1 + (-1)^{m-1} m$$

$$- \{(-1)^{m+1} A_1 + (-1)^m A_2 + (-1)^{m-1} A_3 +$$

$$-1)^i \frac{(m+1)m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots i} A_1 x^{m-i+1} + \ldots + (-1)^m (m+1) A_1 x + (-1)^{m+1} A_1 +$$

$$-1)^{i-1} \frac{m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-1)} A_2 x^{m-i+1} + \ldots + (-1)^{m-1} m A_2 x + (-1)^m A_2 +$$

$$-1)^{i-2} \frac{(m-1) \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-2)} A_3 x^{m-i+1} + \ldots + (-1)^{m-2} (m-1) A_3 x + (-1)^{m-1} A_3 +$$

. . . .

. . . .

$$-\frac{m-i+2}{1} A_i x^{m-i+1} + \ldots + (-1)^{m-i+1} (m-i+2) A_i x + (-1)^{m-i+2} A_i +$$

$+$ . . . .

$$-2A_m x + A_m +$$

$$+ A_{m+1} x - A_{m+1}.$$

$S_m(x-1)$ и, расположивъ ее по степенямъ x, приравняемъ, въ силу (6), x^m

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 - \frac{m-1}{1} A_3 \Big\} x^{m-2} - \ldots$$

$$(-1)^{i-2} \frac{(m-1) \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-2)} A_3 + \ldots - \frac{m-i+2}{1} A_i \Big\} x^{m-i+1} - \ldots$$

$$+ (-1)^{m-2} (m-1) A_3 + \ldots + (-1)^{m-i+1} (m-i+2) A_i + \ldots -2A_m \} x$$

$$+ (-1)^{m-i+2} A_i + \ldots + A_m - A_{m+1} \} = x^m.$$

Это равенство, какъ и (6), должно имѣть мѣсто при всякомъ цѣломъ x, большемъ единицы, а потому коэффиціенты при x^m въ обѣихъ частяхъ его должны быть равны, а всѣ остальные коэффиціенты лѣвой части должны обращаться въ нуль. На основаніи этого, имѣемъ систему равенствъ:

$$\frac{m+1}{1} A_1=1,$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2} A_1-\frac{m}{1} A_2=0,$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} A_1+\frac{m(m-1)}{1.2} A_2-\frac{m-1}{1} A_3=0,$$

. . . .

$$(-1)^i \frac{(m+1)m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots i} A_1+(-1)^{i-1} \frac{m \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-1)} A_2+ \quad (7)$$

$$+(-1)^{i-2} \frac{(m-1) \ldots (m-i+2)}{1.2 \ldots (i-2)} A_3+ \ldots - \frac{m-i+2}{1} A_i=0,$$

. . . .

$$(-1)^m(m+1)A_1+(-1)^{m-1} mA_2+(-1)^{m-2}(m-1)A_3+ \ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m-i+1}(m-i+2)A_i+ \ldots -2A_m=0,$$

$$(-1)^{m+1}A_1+(-1)^m A_2+(-1)^{m-1}A_3+ \ldots +(-1)^{m-i+2}A_i+ \ldots$$

$$\ldots + A_m-A_{m+1}=0.$$

Изъ 1-го равенства найдемъ: $A_1=\frac{1}{m+1}$; изъ 2-го, имѣя A_1, найдемъ $A_2=\frac{1}{2}$, изъ 3-го, имѣя A_1 и A_2, найдемъ A_3 .... и т. д. Такимъ образомъ, всѣ коэффиціенты A_1, A_2, ... до послѣдняго A_{m+1} будутъ опредѣлены. Многочленъ (5) съ найденными указаннымъ способомъ коэффиціентами будетъ, дѣйствительно, представлять сумму

$$1^m+2^m+ \ldots +x^m.$$

Въ самомъ дѣлѣ, согласно опредѣленію коэффиціентовъ, этотъ многочленъ удовлетворяетъ равенству (6). Полагая же въ последнемъ $x=1, 2, \ldots, x$, суммируя полученныя равенства и замѣчая, что при $x=0$ $S_m(x)$ обращается въ 0, найдемъ

$$S_m(x)=1^m+2^m+ \ldots +x^m.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Атмосферный газъ.

Профессора **W. Ramsay.**

Переводъ съ французскаго *).

Открытіе аргона въ 1894 г. было сдѣлано послѣ того, какъ лордъ Rayleigh опубликовалъ свои изслѣдованія надъ упругостью газовъ. Rayleigh нашелъ, что азотъ, получаемый изъ атмосфернаго воздуха, имѣетъ упругость приблизительно на $^1/_{230}$ большую, нежели тотъ-же газъ, добываемый химическимъ путемъ. Это явленіе поразило всѣхъ своей неожиданностью, и никто не подозрѣвалъ его причины до тѣхъ поръ, пока я не указалъ, что эта разница обусловливается присутствіемъ въ атмосферномъ азотѣ новаго газа, который я назвалъ „аргономъ". Нельзя поэтому не признать, что открытіе аргона было до нѣкоторой степени дѣломъ случая; правда, случайность эта имѣла своимъ источникомъ еще работы Кавендиша, а затѣмъ тонкія изслѣдованія чрезвычайно искуснаго экспериментатора—Rayleigh'a.

Но, если можно характеризовать словомъ „случай" открытіе аргона, то открытіе гелія имѣетъ еще болѣе случайный характеръ. Hillebrand, знаменитый минерологъ Геологическаго Бюро въ Вашингтонѣ, анализируя нѣкоторые минералы, содержащіе аргонъ, былъ пораженъ тѣмъ, что они при нагрѣваніи до краснаго каленія, а также при обработкѣ сѣрной кислотой испускаютъ какой-то газъ, который онъ принялъ за азотъ. Въ частности клевеитъ далъ ему этотъ газъ въ значительно большемъ количествѣ, чѣмъ всѣ остальные минералы. Въ ту эпоху я тщательно искалъ путей, которые могли бы привести меня къ синтезу соединеній, содержащихъ аргонъ; я досталъ значительное количество клевеита и—согласно указанію Hillebrand'a—я сталъ его кипятить въ растворѣ сѣрной кислоты. Однако, выдѣлявшійся при этомъ газъ не давалъ спектра аргона; напротивъ того, онъ давалъ линію, тожественную съ той, которую наблюдалъ Janssen во время солнечнаго затменія въ 1868 г. и которую послѣдній приписывалъ кислороду. Frankland и Lockyer занялись изслѣдованіемъ этой линіи и пришли къ убѣжденію, что она принадлежитъ элементу, который на землѣ до того времени не былъ извѣстенъ и который они поэтому назвали „геліемъ". Спектръ гелія содержитъ еще и другія линіи—красныя, зеленыя, фіолетовыя. Этимъ можетъ быть объяснено присутствіе этихъ линій въ спектрахъ нѣкоторыхъ неподвижныхъ звѣздъ.

*) „Revue Générale des Sciences" № 17. 1902.

I.

Итакъ, открытіе этихъ двухъ элементарныхъ газовъ можно считать до нѣкоторой степени случайнымъ. Но открытіе остальныхъ газовъ этой группы—неона, криптона и ксенона—не представляетъ уже ничего случайнаго; оно потребовало упорнаго и труднаго изслѣдованія, которое продолжалось свыше двухъ лѣтъ.

Нѣтъ нужды напоминать, что въ то время, какъ плотность гелія равна 2, плотность аргона равна 20; что отношеніе удѣльныхъ теплотъ при постоянномъ объемѣ, а также и при постоянномъ давленіи равно $^2/_3$, и что, наконецъ, атомные вѣса ихъ равны 4 и 40. Такимъ образомъ, элементы, предшествующіе аргону въ періодической системѣ и слѣдующіе за нимъ суть: съ одной стороны, водородъ и литій, а съ другой стороны, хлоръ и калій.

Эти элементы, равно какъ и другіе, находящіеся въ тѣхъ же колоннахъ, сопоставлены въ слѣдующей таблицѣ:

Водородъ.	Гелій.	Литій.
1	4	7
Фторъ	?	Натрій
19		23
Хлоръ	Аргонъ	Калій
35,5	40	39
Бромъ	?	Рубидій
80		85
Іодъ	?	Цезій
127		133
?	?	?

По этой таблицѣ можно было сразу видѣть, что въ колоннѣ, въ которой гелій занимаетъ первое мѣсто, недостаетъ элементовъ, которые должны соотвѣтствовать фтору, брому и іоду, съ одной стороны, натрію, рубидію и цезію, съ другой стороны.

Выбирая тему для рѣчи, которую я имѣлъ въ виду произнести по случаю прибытія въ Торонто (въ Канадѣ) президента химической секціи Британской Ассоціаціи, я остановился на такомъ заглавіи: „Неизвѣстный газъ“.

Собственно говоря, я имѣлъ возможность предсказать существованіе трехъ неизвѣстныхъ газовъ, но роль пророка была мнѣ не по сердцу, и я не рискнулъ вызвать ироническую улыбку по поводу слишкомъ щедрыхъ предсказаній. Не трудно было указать свойства этого неизвѣстнаго газа: онъ долженъ былъ кипѣть при температурѣ, еще болѣе низкой, чѣмъ аргонъ; онъ долженъ былъ давать столь же яркій спектръ, какъ и аргонъ, только болѣе сложный; подобно двумъ уже открытымъ газамъ, это долженъ

былъ быть элементъ, химически недѣятельный, не входящій въ соединенія съ другими элементами. Наконецъ, онъ долженъ былъ занимать мѣсто между геліемъ и аргономъ.

Поле для исканія этого элемента было достаточно обширно, почти столь-же обширно, какъ и вселенная. Въ сотрудничествѣ съ г. Collie мы предполагали сначала испытывать минералы, такъ какъ намъ казалось вѣроятнымъ, что они ассоціируются съ геліемъ. Власти Британскаго Музея любезно предоставили въ наше распоряженіе образцы большей части своихъ минераловъ; мы кипятили ихъ одинъ за другимъ, и изъ сотни около двадцати давали большее или меньшее количество гелія; одинъ изъ этихъ минераловъ, малаконъ, испускалъ газъ, спектръ котораго совпадалъ со спектромъ аргона. Мы заказали болѣе значительныя количества тѣхъ минераловъ, которые давали много газа; всѣ они содержали уранъ; но тщательное изслѣдованіе ихъ спектровъ не дало ни одной новой линіи.

Около этого времени Lockyer и другіе астрономы высказали мнѣніе, что гелій представляетъ собою смѣсь нѣсколькихъ газовъ. Такое мнѣніе было вызвано сдѣланнымъ ими наблюденіемъ, что въ спектрахъ нѣкоторыхъ звѣздъ зеленая линія значительно ярче желтой. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, мы методически занялись расщепленіемъ гелія, добытаго изъ различныхъ источниковъ; но трехмѣсячная упорная работа въ этомъ направленіи не дала никакого результата: мы постоянно получали гелій, который представлялся намъ совершенно однороднымъ, и небольшой остатокъ, дававшій довольно явственный спектръ аргона. Упреждая нѣсколько событія, я могу прибавить, что намъ удалось, пропустивъ 500 куб. сентиметровъ гелія черезъ стеклянный змѣевикъ погруженный въ жидкій водородъ, выдѣлить твердый осадокъ въ четверть кубическаго сантиметра, который, помимо спектра аргона, давалъ еще двѣ линіи, одну желтую, другую зеленую, столь характерныя для криптона. При этой работѣ я пользовался дѣятельнымъ содѣйствіемъ г. Travers'a. Къ этому нужно прибавить, что Travers'у удалось обнаружить усиленіе зеленой линіи гелія съ ослабленіемъ давленія; онъ доказалъ также, что невозможно расщепить это вещество на два вещества, изъ которыхъ одно давало бы зеленую, другое желтую линію.

Далѣе мы занялись изслѣдованіемъ метеоритовъ. Благодаря любезности лейтенанта Peary, извѣстнаго изслѣдователя полярныхъ странъ, я получилъ довольно большой образчикъ знаменитаго Гренландскаго метеорита. Мнѣ прислали также метеоритъ изъ Виргиніи, а сэръ W. Huggins (въ настоящее время президентъ Royal Society) предоставилъ въ мое распоряженіе 6 небольшихъ аэролитовъ. Только метеоритъ изъ Виргиніи далъ газъ, химически недѣятельный; онъ содержалъ аргонъ и гелій. Въ теченіе послѣднихъ дней мнѣ прислали еще одинъ образецъ другого метеорита аналогичнаго происхожденія; предполагаютъ, что онъ

принадлежитъ тому же рою, что и изслѣдованный мною метеоритъ; онъ давалъ лишь небольшое количество газа, содержалъ слѣды водорода и состоялъ почти исключительно изъ метана; остатокъ, получившійся послѣ удаленія обычныхъ газовъ, обнаруживалъ очень слабый спектръ аргона. Полагаю, что я получилъ при этомъ и зеленую линію гелія, но я въ этомъ не увѣренъ.

Минеральныя воды также дали только гелій и аргонъ. Теплые источники, названные Римлянами „aqua solis“ (не было ли это предвидѣніе открытія гелія?) выдѣляли газъ, который, по удаленіи обычныхъ газовъ, давалъ спектръ аргона и гелія. Въ сотрудничествѣ съ Travers'омъ я повторилъ опыты *Troost'a* и *Bouchard'a*, изслѣдовалъ воды различныхъ источниковъ, изслѣдовалъ Исландскіе сѣрные ключи, — и все-таки не обнаружилъ въ спектрѣ никакихъ новыхъ линій. И именно тогда, когда пути къ разысканію неизвѣстнаго элемента казались уже исчерпанными, мы нашли его, такъ сказать, у себя подъ руками. Вѣдь нерѣдко случается, что мы голову теряемъ, разыскивая очки, а онѣ сидятъ у насъ на лбу. Такъ бываетъ всегда, и я только повторю банальную истину, если скажу, что мы всегда начинаемъ работать самыми сложными аппаратами, самыми сложными методами и только по мѣрѣ того, какъ работа успѣшно движется впередъ, мы упрощаемъ и приборы и пріемы изслѣдованія.

Такъ какъ извѣстные уже газы, аргонъ и гелій, химически недѣятельны, то естественно было ожидать, что и другіе газы, принадлежащіе той же группѣ, имѣютъ такой же характеръ. Ихъ слѣдовало поэтому просто искать въ атмосферномъ воздухѣ, такъ какъ они, по всей вѣроятности, должны были сохранять газообразное состояніе при значительно низкихъ температурахъ. Благодаря любезности г. Hampson'a, который изобрѣлъ прекрасный аппаратъ для ожиженія воздуха, дававшій при пяти лошадиныхъ силахъ добычу около $1^1/_2$ литра въ часъ, мы имѣли въ своемъ распоряженіи литръ этой драгоцѣнной жидкости для нашихъ экспериментовъ. Научившись манипулировать съ этимъ новымъ агентомъ, мы испарили большую часть имѣвшейся въ нашемъ распоряженіи жидкости. Затѣмъ мы очистили пріемами, въ настоящее время хорошо извѣстными, литръ газа, получившійся отъ испаренія послѣдней капли жидкости. Изслѣдуя его спектръ, мы были поражены присутствіемъ двухъ необычайно яркихъ линій—зеленой и желтой. Къ тому же плотность смѣси, состоявшей главнымъ образомъ изъ аргона, составляла 22,5 вмѣсто 20.

Berthelot, основываясь на этомъ, сообщилъ академіи наукъ объ открытіи новаго газа, который онъ назвалъ „криптонъ“, т. е. „скрытый“. Въ ожиданіи прибытія жидкаго воздуха, который Hampson обѣщалъ намъ прислать, Travers приготовилъ значительное количество аргона—около 15 литровъ. Добывъ большее количество жидкаго воздуха, я не замедлилъ превратить весь этотъ аргонъ въ жидкость. Для этого мы помѣстили его въ пу-

зырь и погрузили его въ жидкій воздухъ, кипѣвшій при низкомъ давленіи. Аппаратъ былъ устроенъ такимъ образомъ, что можно было отдѣлить первыя и послѣднія порціи газа въ особые резервуары. Опредѣленіе плотностей различныхъ образцовъ газа обнаружило, что тѣ порціи, которыя кипѣли при наиболѣе низкой температурѣ должны были содержать вещество, болѣе легкое, нежели аргонъ, между тѣмъ какъ послѣднія порціи не были тяжелѣе самаго аргона. Отсюда необходимо было сдѣлать выводъ, что болѣе легкія порціи аргона содержатъ большее количество примѣси. Плюкеровская трубка, наполненная этимъ болѣе легкимъ газомъ, дала блестящій спектръ съ массой характерныхъ красныхъ и оранжевыхъ линій, придававшихъ ему яркую огненную окраску. Такимъ образомъ мы открыли „неонъ", элементъ, который долженъ былъ находиться между геліемъ и аргономъ въ періодической системѣ элементовъ.

Послѣ этого намъ необходимо было пріобрѣсти аппаратъ для ожиженія воздуха, чтобы имѣть возможность оперировать съ большими количествами этой жидкости. Но это требовало времени. Въ ожиданіи этого прибора мы пытались очистить неонъ и криптонъ; но это намъ не удалось, такъ какъ мы располагали ничтожными порціями этихъ веществъ. Врядъ ли нужно говорить, что очистка эта заключалась въ методической дробной перегонкѣ *). При этомъ мы имѣли въ распоряженіи около 30 литровъ жидкаго воздуха; мы старательно собирали послѣднія порціи и, благодаря, этому, накопили порядочное количество криптона. Но этотъ криптонъ былъ какъ то капризенъ: то онъ былъ легче, то тяжелѣе. Долго мы не могли уяснить себѣ причины этого явленія. Остатокъ, который получался послѣ того, какъ мы ожижали аргонъ и вновь испаряли его подъ помпой, не испарялся достаточно равномѣрно; постоянно оставался незначительный бѣлый осадокъ; и въ то время, какъ упругость паровъ аргона выше, нежели упругость паровъ криптона, пары этого осадка имѣли упругость меньшую, нежели пары криптона. Изслѣдованіе спектра этого газа дало намъ полное объясненіе этого явленія. Желтая и зеленая линіи криптона оказались значительно ослабленными и были замѣнены болѣе яркимъ спектромъ. Когда газъ былъ помѣщенъ между полюсами

*) Дробная перегонка заключается въ томъ, что температура мѣняется во время гонки и этимъ путемъ отдѣляются вещества въ зависимости отъ температуры кипѣнія ихъ. Весь погонъ раздѣляется на нѣсколько порцій; такъ напримѣръ тщательно отдѣляютъ (повторнымъ кипяченіемъ въ опредѣленной системѣ) ту часть вещества, которая отогналась при температурѣ, не превышающей T; затѣмъ отдѣляютъ ту часть, которая отогналась при температурѣ $T+h$, потомъ $T+2h$ и т. д. Когда эти порціи отобраны, каждую изъ нихъ вновь подвергаютъ такой же перегонкѣ, т. е. интервалъ h дѣлится на нѣсколько частей. Такимъ образомъ отдѣляются вещества, кипящія при различныхъ температурахъ.

Прим. перев.

лейденской банки, то онъ испускалъ голубоватый (небеснаго цвѣта) свѣтъ, и спектръ давалъ многочисленныя линіи, въ особенности, въ области зеленаго и голубого цвѣта; этотъ спектръ принадлежалъ еще одному новому газу „ксенону" („странный" газъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Опредѣленіе точки плавленія вещества по образцу, содержащему примѣси.

Объ экстраполяціи точки плавленія химически однороднаго вещества на основаніи измѣреній по изобарамъ объемовъ вблизи точки плавленія. (Статья *В. Соболевой* въ „Zeitschr. für phys. Chemie", XLII, стр. 75—80 и въ „Ж. Р. Ф. Х. О.", т. XXXIV, стр. 714—720).

Въ статьѣ, заглавіе которой выписано выше, дается чрезвычайно любопытный методъ для опредѣленія точки плавленія вещества въ томъ случаѣ, когда имѣется нечистый, содержащій примѣси образецъ этого вещества. Помимо чисто теоретическаго значенія, методъ г-жи Соболевой получитъ, несомнѣнно, и практическое примѣненіе, такъ какъ полная очистка вещества отъ его примѣсей является иногда операціей невыполнимой, вслѣдствіе того, что въ рукахъ имѣется очень мало вещества. Между тѣмъ, уже небольшое количество примѣсей сильно вліяетъ на точку плавленія, понижая ее. Идея излагаемаго метода принадлежитъ проф. Тамману. Она представляется намъ настолько оригинальной, что мы считаемъ цѣлесообразнымъ прореферировать статью г-жи Соболевой на страницахъ „Вѣстника".

Если нагрѣвать химически однородное и идеально чистое твердое вещество при постоянномъ давленіи и, откладывая температуры на оси абсциссъ, наносить соотвѣтствующіе имъ приращенія объема на ординаты, то получимъ кривую 1, 1, 1 на фиг. 1, показывающую, что во время плавленія вещества температура T_0 остается постоянной.

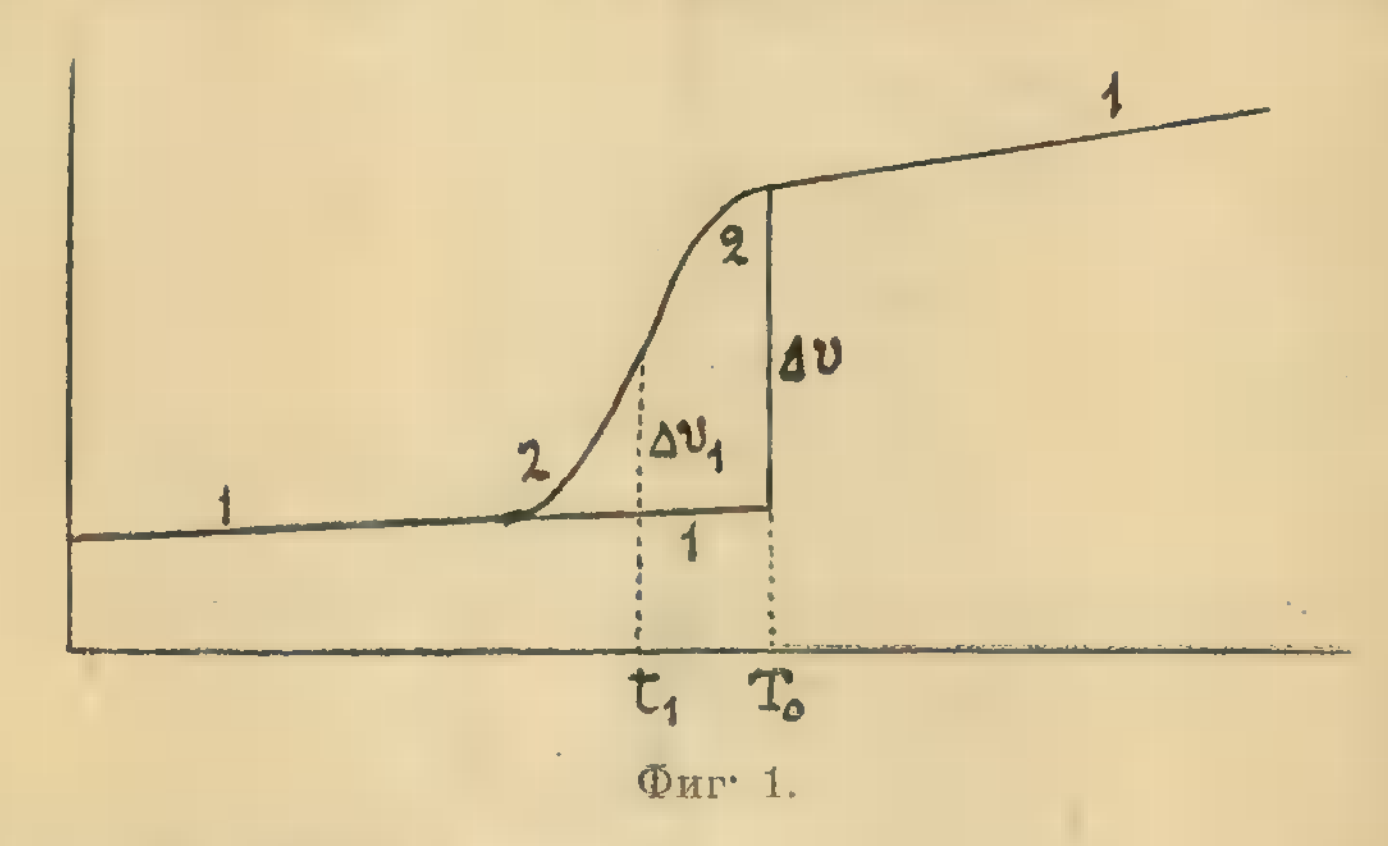
Если къ химически чистому веществу прибавить небольшое количество такой примѣси, которая не образуетъ твердаго раствора съ его кристаллами, то температура плавленія уже не будетъ постоянной, и переходъ отъ твердаго состоянія къ жидкому совершится въ нѣкоторомъ температурномъ интервалѣ, какъ показываетъ кривая 1, 2, 2, 1 на фиг. 1.

Пусть x будетъ концентрація примѣсей, когда все взятое вещество расплавлено. Тогда, если примѣси не образуютъ твердаго раствора съ кристаллами (это условіе является необходимымъ для примѣнимости метода), т. е. если все количество при-

мѣсей растворено въ расплавившейся части нашего вещества, концентраціи примѣсей при температурахъ t_1, t_2, t_3, лежащихъ внутри того интервала, когда происходитъ плавленіе, будутъ соотвѣтственно

$$\frac{x\Delta v}{\Delta v_1},\ \frac{x\Delta v}{\Delta v_2},\ \frac{x\Delta v}{\Delta v_3},$$

гдѣ Δv есть измѣненіе объема, соотвѣтствующее температурѣ плавленія чистаго вещества, а Δv_1, Δv_2 и Δv_3 — измѣненія объема



Фиг. 1.

при температурахъ t_1, t_2 и t_3.

Такъ какъ пониженіе температуры плавленія пропорціонально концентраціи, то

$$\frac{T_0 - t_1}{\frac{x\Delta v}{\Delta v_1}} = \frac{T_0 - t_2}{\frac{x\Delta v}{\Delta v_2}} = \frac{T_0 - t_3}{\frac{x\Delta v}{\Delta v_3}} = \ldots = \text{const.},$$

откуда

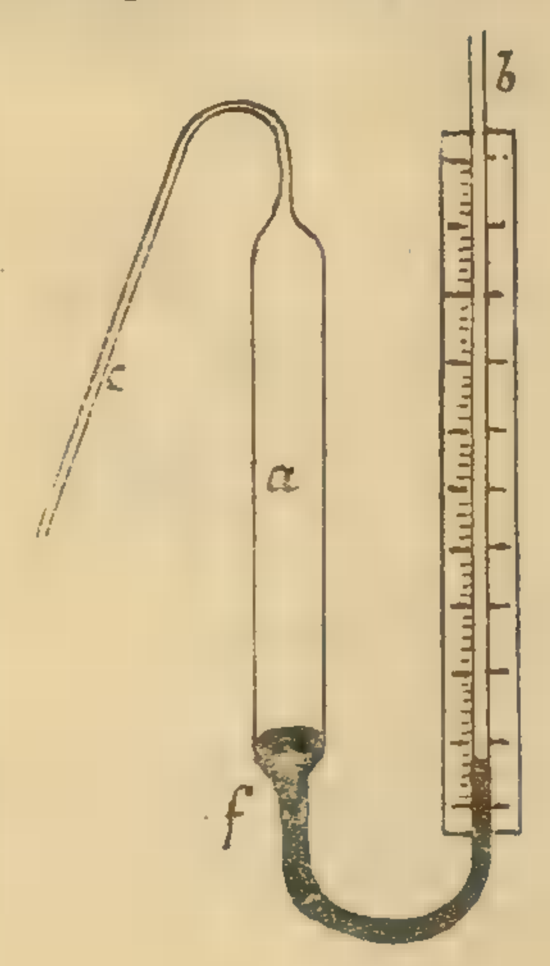
$$T_0 = \frac{\Delta v_1 . t_1 - \Delta v_2 . t_2}{\Delta v_1 - \Delta v_2}.$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія температуры плавленія достаточно знать приращенія объема, соотвѣтствующія двумъ извѣстнымъ температурамъ. Но для опредѣленія приращеній объема надо построить часть кривой, соотвѣтствующую твердому состоянію, т. е. надо наблюдать большее число точекъ.

Для измѣреній г-жа Соболева употребляла дилатометръ, изображенный на фиг. 2. Приборъ сперва наполнялся ртутью, а затѣмъ, погружая капилляръ c въ расплавленное вещество, въ приборъ всасывали около 1 гр. вещества и запаивали капилляръ. Затѣмъ приборъ на нитяхъ подвѣшивали въ ваннѣ, вблизи термометра, и медленно поднимали температуру ванны. Чтобы сдѣлать равномѣрной температуру и концентрацію плавящагося вещества, приборъ передвигали при помощи нитей такъ, что часть ртути переливалась въ широкое колѣно a и замѣняла здѣсь мѣшалку.

Чтобы расплавленное вещество не попадало въ колѣно b, у f помѣщали пучекъ тонкой желѣзной проволоки, задерживавшей ртуть, благодаря капиллярности. Затѣмъ оставалось только отмѣчать температуры и соотвѣтствующіе имъ уровни ртути въ колѣнѣ b *).

Изложенный способъ былъ примѣненъ къ опредѣленію температуры плавленія нѣкоторыхъ веществъ. Взятъ былъ образецъ



Фиг. 2.

дифениламина, вещества, плавящагося при 54°, съ температурой плавленія 52°,5. Наблюденіе дало:

$$t_1 = 53^\circ,7 \qquad \Delta v_1 = 1,65$$

$$t_2 = 53^\circ,2 \qquad \Delta v_2 = 1,10$$

$$t_3 = 52^\circ,7 \qquad \Delta v_3 = 0,65.$$

Для T_0 получаются отсюда значенія:

$$54^\circ,69; \quad 54^\circ,35; \quad 53^\circ,93.$$

Къ дефениламину былъ прибавленъ 1% нафталина. Эта смѣсь плавилась при 52°,36, а вычисленіе дало 54°,19. Въ среднемъ изъ всѣхъ опытовъ для дифениламина получено 54°,09 ± 0,15. Образецъ ванилина (т. пл. 81°) съ температурой плавленія 76°,9, далъ по изложенному методу 81°,32 ± 0,18; для нафталина получено 80°,98 ± 0,15 вмѣсто 80°,06, для ортокрезола — 30°,05 ± 0,16 вмѣсто 30°.

В. Г.

---

*) Строго говоря, плавленіе не происходитъ здѣсь при постоянномъ давленіи, такъ какъ уровень ртути въ колѣнѣ b повышается. Но температура плавленія ничтожно измѣняется въ зависимости отъ давленія.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Переводъ „Курса Физики“ О. Д. Хвольсона на нѣмецкій языкъ. — На-дняхъ вышелъ изъ печати изданный фирмою Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig первый томъ хорошо извѣстнаго русской публикѣ „*Курса Физики*“ профессора О. Д. Хвольсона, въ переводѣ на нѣмецкій языкъ, выполненномъ г. Г. Э. Пфлаумомъ (въ Ригѣ). Переводъ этотъ снабженъ предисловіемъ E. Wiedemann'а. Насколько намъ извѣстно, это *первый случай въ исторіи литературы русской физики*, чтобы русская книга переводилась на иностранный языкъ. Въ математической литературѣ есть нѣсколько примѣровъ этого рода; такъ, на нѣмецкій языкъ переведены „Теорія сравненій“ П. Л. Чебышева, „Исчисленіе конечныхъ разностей“, А. А. Маркова, „Механика“ Сомова. Были также переведены нѣкоторыя сочиненія русскихъ авторовъ по химіи. Такимъ образомъ, появленіе перевода книги проф. Хвольсона представляетъ собой почннъ. Да послужитъ онъ хорошимъ началомъ.

Цѣна перваго тома перевода 12 марокъ, что для германскихъ условій представляетъ собой небывалую дешевизну. Издана книга превосходно и снабжена регистромъ.

Празднованіе пятидесятилѣтія опыта Foucault съ маятникомъ. — По инціативѣ Camille'a Flammarion'a, по случаю исполнившагося пятидесятилѣтія опыта Foucault съ маятникомъ, которымъ впервые было экспериментально доказано вращеніе земли, — въ Парижѣ, въ *Пантеонѣ*, гдѣ этотъ опытъ былъ произведенъ Foucault, онъ былъ публично повторенъ въ томъ видѣ, какъ его производилъ самъ Foucault.

Юбилей Otto v. Guericke. — 20-го ноября исполнилось 200 лѣтъ со дня рожденія Guericke или Gericke (1602—1686), Магдебургскаго бургомистра, одного изъ трехъ отцовъ ученія о газахъ. Guericke, независимо отъ Torricelli, построилъ барометръ и произвелъ рядъ опытовъ, заставившихъ физиковъ оставить схоластическое представленіе о „horror vacui“, и установившихъ понятіе объ атмосферномъ давленіи. Въ этомъ главная заслуга Guericke. — Кромѣ того, онъ впервые построилъ электростатическую машину, состоявшую изъ шара изъ сѣры, который вращался при помощи особой рукоятки и натирался при этомъ рукой. — Важнѣйшее сочиненіе Guericke: *Experimenta Magdeburgica* было опубликовано въ *1672-омъ* году.

Тема для соисканія медали имени проф. С. П. фонъ-Глазенапа. Совѣтъ Русскаго Астрономическаго Общества объявляетъ, что, на основаніи § 2 Правилъ для присужденія медали Русскаго Астрономическаго Общества на %% съ неприкосновеннаго капитала имени профессора С. П. фонъ-Глазенапа, назначена въ 1902 году слѣдующая тема для соисканія означенной медали:

„Изложеніе способовъ опредѣленія орбитъ двойныхъ звѣздъ“.

Срокъ представленія работъ въ Русское Астрономическое Общество въ С.-Петербургѣ (Вас. Остр., зданіе Университета) — 1-го января 1905 г.

Представляемыя для соисканія медали работы могутъ быть какъ въ печатномъ видѣ, такъ и въ рукописномъ, съ обозначеніемъ имени автора и мѣста его жительства. Присуждаемая за лучшія работы медаль—золотая, цѣнностью въ 135 руб. золотомъ.

Правила для присужденія медали имени профессора С. П. фонъ-Глазенапа можно получить у Секретаря Общества Л. Г. Малиса въ С.-Петербургѣ (Вас. Остр., Тучковъ пер., № 10).

Многократная телеграфія посредствомъ резонанса. Профессоръ Попенъ, занимающійся спеціально изслѣдованіемъ распространенія электрическихъ волнъ по проводникамъ, предложилъ систему многократной телеграфіи, основанную на резонансѣ. Назначеніе этого изобрѣтенія заключается въ передачѣ одновременно нѣсколькихъ телеграммъ по одному проводнику посредствомъ токовъ различной періодичности. Когда періодичная электровозбудительная сила дѣйствуетъ на проводникъ, электромагнитныя свойства котораго—емкость, самоиндукція и сопротивленіе—могутъ быть урегулированы, тогда измѣненіемъ емкости или самоиндукціи, или той и другой, эти электромагнитныя постоянныя могутъ быть приведены въ соотвѣтствіе другъ съ другомъ такимъ образомъ, чтобы естественный періодъ электрическихъ колебаній проводника былъ равенъ періоду вводимой электровозбудительной силы. Тогда проводникъ и электровозбудительная сила находятся въ электрическомъ созвучіи (резонансѣ). Процессъ регулированія естественнаго періода проводника такимъ образомъ, чтобы достигнуть созвучія, можно назвать „электрическимъ настраиваніемъ". Законы, которымъ подчиняются электрическое настраиваніе и электрическое созвучіе, аналогичны музыкальнымъ (звуковымъ) настраиванію и резонансу.

Созвучный проводникъ при всякихъ условіяхъ представляетъ меньшее сопротивленіе току, электровозбудительная сила котораго находится въ созвучіи съ проводникомъ, чѣмъ всякому другому току. Поэтому такой проводникъ можетъ служить избирателемъ тока, т. е., когда онъ составляетъ часть системы, къ которой прилагается сложный токъ съ электровозбудительными силами различной періодичности, то сопротивленіе его будетъ меньше по отношенію къ той электровозбудительной силѣ, съ которою онъ находится въ созвучіи. Такъ, въ системѣ съ регулируемыми катушками самоиндукціи конденсаторами какъ катушки, такъ и конденсаторы могутъ быть урегулированы такимъ образомъ, что каждый проводникъ будетъ имѣть различный, впередъ опредѣленный, естественный періодъ, и поэтому каждая часть будетъ въ резонансѣ съ періодической электровозбудительной силой своего „тона", независимо отъ присутствія другихъ электровозбудительныхъ силъ. Такая система соотвѣтственно настроенныхъ проводниковъ различной періодичности дѣйствуетъ,

благодаря ея свойствамъ резонанса, какъ комплектъ избирателей тока. Въ этомъ заключается существенная черта изобрѣтенія и отсюда очевидна его примѣнимость къ многократной телеграфіи. Д-ръ Попенъ утверждаетъ, что такимъ образомъ можно распредѣлять электрическую энергію, безразлично, для какой цѣли она должна служить, именно: вводить въ общій проводникъ нѣсколько перемѣнныхъ токовъ различной частоты и раздѣлять эти токи, каждый въ соотвѣтственный пріемникъ, настраивая различныя части соотвѣтственно различнымъ періодичностямъ. Эти способы могутъ быть приведены въ исполненіе многими различными системами приборовъ.

(Почт. Тел. Ж.).

Новый родъ примѣненія безпроволочнаго телеграфа. Въ Америкѣ нашли новый родъ примѣненія безпроволочнаго телеграфа, пользуясь имъ для опредѣленія разности долготъ между различными мѣстностями. Прежде опредѣляли сначала въ точности, посредствомъ астрономическихъ наблюденій, время въ двухъ данныхъ мѣстностяхъ; затѣмъ въ заранѣе условленный моментъ посылали изъ одной изъ этихъ мѣстностей телеграфный сигналъ, который, вслѣдствіе разности между долготами или во времени въ томъ и другомъ пунктѣ, приходилъ въ другую мѣстность соотвѣтственно раньше или позже. Такимъ образомъ можно было установить разницу во времени между двумя данными точками; но для этого необходимо было, чтобы мѣстности эти были сообщены между собою телеграфными проводами. Въ настоящее время удалось, по крайней мѣрѣ, на небольшихъ разстояніяхъ, вычислить долготу посредствомъ безпроволочнаго телеграфа. Такимъ образомъ получилась возможность опредѣлить въ точности на географическихъ картахъ положеніе отдѣльныхъ острововъ, что имѣетъ весьма важное значеніе въ мореплаваніи. Кромѣ того, можно также съ полною точностью опредѣлить географическое положеніе различныхъ пунктовъ въ странахъ мало изслѣдованныхъ, какъ, напримѣръ, въ пустыняхъ и у полюсовъ, гдѣ еще не имѣется телеграфныхъ сообщеній.

(Почт. Тел. Ж.).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Избранія по поводу юбилея Abel'я. — Университетъ въ Христіаніи избралъ по поводу юбилея Abel'я почетными докторами слѣдующихъ математиковъ: 1) Paul Emile Appel (Франція), 2) Oskar Backlund (Россія), 3) Georg Cantor (Германія), 4) Luigi Cremona (Италія), 5) Jean Gaston Darboux (Франція), 6) Georg Howard Darwin (Англія), 7) Ulisse Dini (Италія), 8) Andreas Russel Forsyth (Англія), 9) Josiah Willard Gibbs (Сѣв. Ам. Соед. Шт.), 10) David Hilbert (Германія), 11) Enne-

mond Camille Jordan (Франція), 12) Lord Kelwin (Англія), 13) Felix Klein (Германія), 14) Leo Königsberger (Германія), 15) Андрей Андреевичъ Марковъ (Россія), 16) Simon Newcomb (Сѣв. Ам. Соед. Шт.), 17) Magnus Gosta Mittag-Leffler (Швеція), 18) Charles Emile Picard (Франція), 19) Jules Henri Poincaré (Франція), 20) Lord Rayleigh (Англія), 21) Georg Salmon (Ирландія), 22) H. A. Schwarz (Германія), 23) Sir George Gabriel Stokes (Англія), 24) Vito Voltera (Италія), 25) Hieronymus Georg Zeuthen (Данія).

† Д. Лачиновъ. — Скончался проф. физики и метеорологіи Лѣсного Института Д. Лачиновъ. О его научной дѣятельности мы вскорѣ сообщимъ подробно.

† Wislicenus. — Скончался извѣстный химикъ, проф. Лейпцигскаго Университета Wislicenus.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Замѣтка о сложеніи силъ.

Въ одномъ изъ французскихъ журналовъ Maurice d'Ocagne предлагаетъ очень простой способъ для вывода правила сложенія параллельныхъ силъ, на основаніи закона параллелограмма силъ. Способъ его заключается въ слѣдующемъ. Двѣ силы F и F′ приложены къ двумъ точкамъ A и A′, которыя неизмѣнно соединены съ тѣломъ. Пусть направленія этихъ силъ пересѣкаются въ точкѣ C, а B—означаетъ точку, въ которой направленіе равнодѣйствующей R встрѣчаетъ окружность круга, описаннаго около $\triangle ACA'$.

Изъ закона параллелограмма силъ слѣдуетъ:

$$\frac{F}{\mathrm{Sn}(R, F')}=\frac{F'}{\mathrm{Sn}(R, F)}=\frac{R}{\mathrm{Sn}(F, F')}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Sn}(R, F')=\mathrm{Sn}\angle BAA'$; $\mathrm{Sn}(R, F)=\mathrm{Sn}\angle AA'B$ и

$$\mathrm{Sn}(F, F')=\mathrm{Sn}\angle ABA'.$$

Но синусы $\angle BAA'$, $\angle AA'B$ и $\angle ABA'$ треугольника $AA'B$ пропорціональны его сторонамъ BA', AB и AA'. Поэтому

$$\frac{F}{BA'}=\frac{F'}{AB}=\frac{R}{AA'}=\frac{F+F'}{AB+BA'}.$$

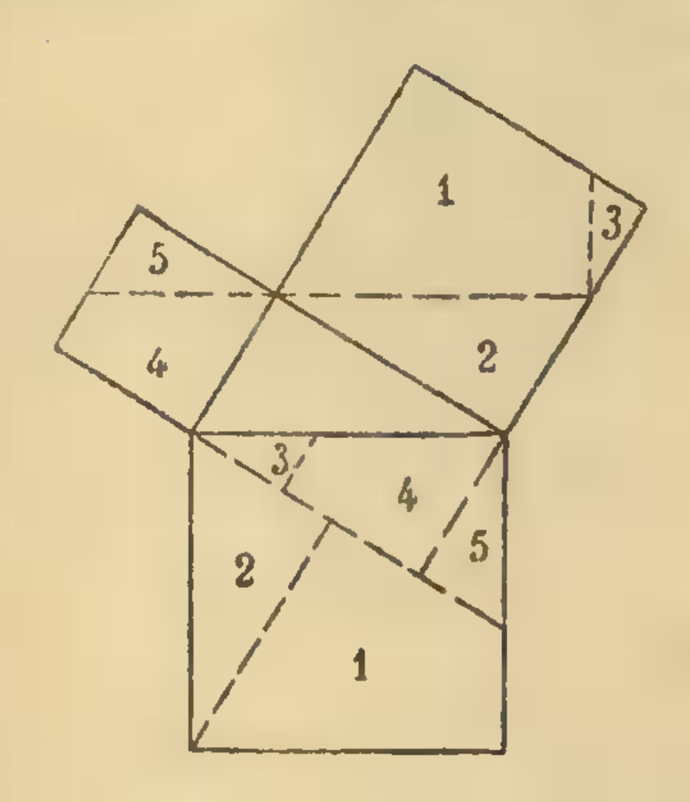
Если предположить, что точка C находится на безконечности, а слѣдовательно, силы F и F′ параллельны, тогда точки A, A′ и B лежатъ на одной прямой, и послѣднія отношенія опредѣляютъ тогда законъ сложенія параллельныхъ силъ.

Изъ этого же закона слѣдуетъ, что, если силы F и F′ повернуть въ ихъ плоскости на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ точекъ A и A′, то направленіе равнодѣйствующей R повернется на тотъ же уголъ около точки B. Это предложеніе распространяется и на случай дѣйствія нѣсколькихъ силъ.

К. Пеніонжкевичъ

Новое доказательство пиѳагоровой теоремы.

Во второй тетради „Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires" напечатанъ помѣщенный ниже чертежъ, содержащій новое доказательство пиѳагоровой теоремы. Доказательство принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя разрѣзываютъ



квадраты, построенные на катетахъ, на части, изъ которыхъ можно составить квадратъ, построенный на гипотенузѣ. Предоставляемъ читателю воспроизвести доказательство по чертежу.

РЕЦЕНЗІИ.

„*Моментальный или контрольный способъ провѣрки ариѳметическихъ дѣйствій надъ простыми числами*". Составилъ **Л. С—кій**. Вильна. Книжка эта недавно вышла 2-мъ изданіемъ.

Въ своемъ вступленіи г. С. разсказываетъ, при какихъ обстоятельствахъ онъ „открылъ" этотъ способъ провѣрки; но это къ дѣлу не относится, равно какъ не заслуживаетъ вниманія и часть II-ая упомянутой книжки, гдѣ авторъ говоритъ о связи между цыфрами и христіанской хронологіей. I-ая же часть, посвященная контрольному способу провѣрки 4-хъ ариѳметическихъ дѣйствій, имѣетъ практическое значеніе, такъ какъ безусловно ускоряетъ во много разъ контролированіе результатовъ дѣйствій. Авторъ, не знакомый съ основами ариѳметики, пола-

галъ предлагаемый имъ способъ „новымъ“; на самомъ же дѣлѣ это лишь нѣсколько замаскированный пріемъ повѣрки дѣленіемъ на 9, но такъ какъ въ элементарныхъ учебникахъ до сихъ поръ на этотъ предметъ не обращено надлежащаго вниманія, то съ этой стороны предлагаемый пріемъ можетъ быть названъ новымъ. Приведу два примѣра, чтобы дать понятіе, въ какомъ порядкѣ дѣлаются контрольныя выкладки. Пусть дано сложить 578 и 694. Сумма равна 1272. Для повѣрки берете сумму цыфръ 1-го числа; она равна 20; снова составляете сумму цыфръ этого числа: $2+0=2$. Сумма цыфръ 2-го числа равна 19; сумма цыфръ этого числа $1+9=10$; сумма же цыфръ 10 равна 1. Затѣмъ складываете полученныя числа: $2+1=3$. Берете сумму цыфръ 1272; она равна 12, а сумма цыфръ этого числа—3. Заключаемъ, что дѣйствіе, весьма вѣроятно, сдѣлано вѣрно. Не трудно сообразить, почему? 2 и 1 суть остатки отъ дѣленія данныхъ чиселъ на 9. Сумма 1272 тоже при дѣленіи на 9 даетъ остатокъ, равный 3. Также производится повѣрка вычитанія. Умноженіе провѣряется еще быстрѣе. Напр. $2682452 \times 348 = 933493296$. Первое число приводится къ 2, второе къ 6; произведеніе ихъ 12. Сумма цыфръ этого числа $1+2=3$. Сумма цыфръ произведенія равна тоже 3. — Указанный пріемъ примѣняется, конечно, и къ дѣленію безъ остатка и съ остаткомъ. При нѣкоторомъ навыкѣ контролированіе дѣлается очень быстро.

Вл. К—ъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 268 (4 сер.). Даны уголъ B и точка A. На сторонахъ угла B найти точки x и y такъ, чтобы отрѣзокъ xy былъ параллеленъ данной прямой L и чтобы отношеніе отрѣзка xy къ его разстоянію отъ точки A имѣло данное значеніе.

П. Александровъ (Тамбовъ).

№ 269 (4 сер.). Построить треугольникъ по его периметру $2p$, основанію a и высотѣ h.

І. Л. Бергеръ (Харьковъ).

№ 270 (4 сер.). Изъ равенства

$$2\cos\Theta = u + \frac{1}{u}$$

вывести, что

$$2\cos n\Theta = u^n + \frac{1}{u^n}\,.$$

К. Пеніонжкевичъ (Екатеринбургъ).

№ 271 (4 сер.). Суммировать безконечный рядъ

$$m+mp+(m+mn)p^2+(m+mn+mn^2)p^3+(m+mn+mn^2+mn^3)p^4+\ldots,$$

гдѣ $|n|<1$, $|p|<1$.

Х. Вовси (Двинскъ).

№ 272 (4 сер.). Исключить z изъ уравненій:

$$x=\frac{2(m+nz^2)}{1+z^2}$$

$$y=\frac{2(m-n)z}{1+z^2}.$$

Н. С. (Одесса).

№ 273 (4 сер.). Желѣзный цилиндръ высотою въ 20 сантиметровъ плаваетъ въ ртути такъ, что ось его была вертикальна и чтобы онъ выступалъ изъ жидкости на 3 сантиметра. Съ этой цѣлью, къ нему припаиваютъ платиновый цилиндръ того же сѣченія. Опредѣлить высоту послѣдняго. Плотности платины, ртути и желѣза равны соотвѣтственно 21, 7,8, 13,6.

М. Гербановскій (Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 189 (4 сер.). *Сила тока постоянной батареи равна* 10 *амперамъ, если внѣшнее сопротивленіе равно* 10 *омамъ; она равна* 8 *амперамъ при внѣшнемъ сопротивленіи въ* 20 *омовъ, и* 9 *амперамъ, при внѣшнемъ сопротивленіи въ* x *омовъ. Опредѣлить сопротивленіе батареи* R *и внѣшнее сопротивленіе* x?

Называя электродвижущую силу батареи черезъ y, согласно съ условіемъ задачи, находимъ:

$$10=\frac{y}{R+10}\ (1),\ 8=\frac{y}{R+20}\ (2),\ 9=\frac{y}{R+x}\ (3).$$

Дѣля почленно уравненіе (1) на уравненіе (2), находимъ:

$$\frac{R+20}{R+10}=\frac{5}{4},\text{ откуда } R=30\text{ омовъ.}$$

Дѣля почленно уравненіе (2) на уравненіе (3) и подставляя затѣмъ вмѣсто R его значеніе, получимъ:

$$\frac{R+x}{R+20}=\frac{8}{9};\quad \frac{30+x}{50}=\frac{8}{9},$$

откуда

$$x=\frac{130}{9}\text{ ом.}=14\frac{4}{9}\text{ омовъ.}$$

Г. Огановъ (село Гомадзоръ).

№ 190 (4 сер.). *Опредѣлить три цѣлыхъ числа* x, y, z, *удовлетворяющихъ равенству*

$$x+y+z=xyz.$$

Полагая $x=0$, находимъ $y+z=0$, $y=-z$. Такимъ образомъ, уравненіе

удовлетворяется значеніями неизвѣстныхъ

$$x=0, \quad y=m, \quad z=-m,$$

гдѣ m—произвольное цѣлое число. Вслѣдствіе симметричности предложеннаго уравненія относительно неизвѣстныхъ, оно имѣетъ также цѣлыя рѣшенія:

$x=m$, $y=0$, $z=-m$; $x=m$, $y=-m$, $z=0$, гдѣ m—произвольное цѣлое число.

Остается разсмотрѣть случай, когда ни x, ни y, ни z не равны нулю. Въ этомъ случаѣ обѣ части даннаго уравненія можно раздѣлить на xyz, и тогда находимъ:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1 \qquad (1).$$

Неравенства

$$\left|\frac{1}{xy}\right|<\frac{1}{3}, \quad \left|\frac{1}{yz}\right|<\frac{1}{3}, \quad \left|\frac{1}{zx}\right|<\frac{1}{3}$$

не могутъ существовать одновременно, такъ какъ въ этомъ случаѣ абсолютная величина лѣвой части равенства (1), которая не *больше* $\left|\frac{1}{xy}\right|+\left|\frac{1}{yz}\right|+\left|\frac{1}{xz}\right|$, была бы менѣе 1. Итакъ, одно изъ количествъ $\left|\frac{1}{xy}\right|$, $\left|\frac{1}{yz}\right|$, $\left|\frac{1}{zy}\right|$ (все равно, какое, вслѣдствіе симметріи уравненія) *больше* или *равно* $\frac{1}{3}$, а потому одно изъ количествъ $|xy|$, $|yz|$, $|zx|$, напримѣръ, первое *менѣе* 3 или *равно* 3. Итакъ, предположимъ

$$|xy| \leqslant 3 \qquad (2).$$

Такъ какъ y, по предположенію, число цѣлое, то x можетъ принимать лишь цѣлыя значенія ± 1, ± 2, ± 3. Остановимся на положительныхъ значеніяхъ x, и пусть $x=1$; тогда (см. (1)) y можемъ принимать лишь цѣлыя значенія ± 1, ± 2, ± 3. Подставляя въ данное уравненіе 1 вмѣсто x и одно изъ чиселъ ± 1, ± 2, ± 3 вмѣсто y, найдемъ, что z получаетъ цѣлыя и отличныя отъ нуля значенія лишь при $y=2$ (именно, $z=3$) и при $y=3$ (а именно, $z=2$). Такимъ образомъ находимъ рѣшенія:

$$\begin{matrix} x=1, & y=2, & z=3 \\ x=1, & y=3, & z=2 \end{matrix} \qquad (3).$$

Полагая $x=2$ и замѣчая (см. (2)), что y при этомъ значеніи x можетъ принимать лишь значенія ± 1, находимъ, что лишь значенію $z=1$ отвѣчаетъ цѣлое значеніе $z=3$ для третьяго неизвѣстнаго; полагая $x=3$ находимъ подобнымъ же образомъ $y=\pm 1$, при чемъ значеніе $y=-1$ непригодно, а, при $y=1$, $z=2$. Такимъ образомъ получаемъ еще рѣшенія

$$\begin{matrix} x=2; & y=1, & z=3 \\ x=3; & y=1; & z=2 \end{matrix} \qquad (4).$$

Вотъ всѣ цѣлыя рѣшенія, вытекающія изъ гипотезы (2) при x положительномъ. Если x отрицательно, то, полагая $x=-x'$, $y=-y'$, $z=-z'$, приводимъ данное уравненіе къ виду:

$$x'+y'+z'=x'y'z',$$

гдѣ $x'>0$; итакъ, цѣлое рѣшеніе при x отрицательномъ получается изъ *нѣкотораго* цѣлаго рѣшенія, для котораго x положительно, перемѣной у значеній *всѣхъ* трехъ неизвѣстныхъ знаковъ на обратные. Кромѣ гипотезы (2) возможны гипотезы $|yz| \leqslant 3$, $|zx| \leqslant 3$; эти гипотезы, по предыдущему (см. (3), (4)), даютъ лишь рѣшенія, при которыхъ неизвѣстныя равны соотвѣтственно числамъ 1, 2, 3 (при чемъ для одного изъ неизвѣстныхъ

взято по предположенію положительное значеніе). Изъ всего сказаннаго, въ связи съ замѣчаніемъ объ отрицательныхъ рѣшеніяхъ, слѣдуетъ, что *всѣ* цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія даны формулами:

$$x=0,\qquad y=m,\qquad z=-m;$$

$$x=\pm 1,\quad y=\pm 2,\quad z=\pm 3,$$

при чемъ m — произвольное цѣлое число; во второй системѣ надо брать всюду или верхніе, или нижніе знаки, и, кромѣ того, въ каждой изъ системъ рѣшеній неизвѣстныя могутъ обмѣниваться значеніями.

Н. Готлибъ (Митава); *Н. С.* (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань); *І. Бергеръ* (Янушполь).

№ 193 (4 сер.). *Вычислить и построить острый уголъ* x, *удовлетворяющій равенству*

$$7\lg\cos x+3\lg\sin x=13\lg\operatorname{tg} x.$$

Изъ предложеннаго равенства выводимъ послѣдовательно:

$$\lg\cos^7 x+\lg\sin^3 x=\lg\operatorname{tg}^{13} x,$$

$$\lg(\cos^7 x.\sin^3 x)=\lg\operatorname{tg}^{13} x,$$

$$\cos^7 x.\sin^3 x=\operatorname{tg}^{13} x,$$

откуда, умножая обѣ части равенства на $\cos^{13} x$, находимъ:

$$\cos^{20} x.\sin^3 x=\sin^{13} x,$$

$$\sin^3 x(\cos^{20} x-\sin^{10} x)=0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два:

$$\sin^3 x=0,\quad \text{откуда } x=0, \text{ такъ какъ } x<90^0;$$

$$\cos^{20} x=\sin^{10} x,\quad \text{или } \pm\cos^2 x=\pm\sin x,$$

— такъ какъ мы интересуемся лишь рѣшеніями, имѣющими геометрическій смыслъ. Послѣднее уравненіе равносильно двумъ уравненіямъ: $\cos^2 x=\sin x$, $\cos^2 x=-\sin x$, которыя мы соединимъ въ одно равенство

$$\cos^2 x=\pm\sin x,$$

или

$$1-\sin^2 x=\pm\sin x;\quad \sin^2 x\pm\sin x-1=0,$$

откуда

$$\sin x=\frac{\mp 1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $|\sin x|\leqq 1$ и такъ какъ, при остромъ x, $\sin x>0$, то остается выбрать рѣшеніе

$$\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

откуда $x=38^0 10' 23''$. Для построенія угла x въ кругѣ произвольнаго радіуса r строимъ общеизвѣстнымъ образомъ сторону a_{10} правильнаго вписаннаго десятиугольника. Затѣмъ строимъ прямоугольный треугольникъ ABC по гипотенузѣ $BC=r$ и катету $AB=a_{10}=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$. Тогда уголъ C есть искомый, такъ какъ $\sin C=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}:r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Г. Огановъ (Эривань); *Л. Рабиновичъ* (Бердичевъ); *Л. Ямпольскій* (Одесса); *И. Плотникъ* (Одесса).

№ 209 (4 сер.). *Найти общій видъ цѣлыхъ чиселъ, которыя по раздѣленіи на* 7 *даютъ въ остаткѣ* 3, *а квадраты и кубы которыхъ по раздѣленіи на* 7^2 *и* 7^3 *даютъ въ остаткѣ соотвѣтственно* 44 *и* 111.

Обозначимъ цѣлое число, обладающее указанными въ условіи свойствами, черезъ N. Такъ какъ N по раздѣленіи на 7 даетъ въ остаткѣ 3, то N есть число вида $7x+3$, гдѣ x—нѣкоторое цѣлое число. По условію N^2 по раздѣленіи на 7^2 даетъ въ остаткѣ 44; это условіе равносильно тому, чтобы разность N^2-44 дѣлилась на 7^2 безъ остатка. Итакъ, выраженіе

$$\frac{N^2-44}{7^2}=\frac{(7x+3)^2-44}{7^2}=\frac{7^2x^2+42x-35}{7^2}=x^2+\frac{6x-5}{7}$$

должно быть числомъ цѣлымъ, для чего необходимо и достаточно, чтобы число $\frac{6x-5}{7}$ равнялось нѣкоторому цѣлому числу y, откуда

$$6x-7y=5,$$

гдѣ x и y—цѣлыя числа. Рѣшая это уравненіе въ цѣлыхъ числахъ методомъ подстановокъ, убѣждаемся, что

$$x=7t+2,$$

гдѣ t—нѣкоторое цѣлое число. Слѣдовательно,

$$N=7(7t+2)+3=7^2t+17.$$

По условію, $\frac{N^3-111}{7^3}$ есть число цѣлое.

Но

$$\frac{N^3-111}{7^3}=\frac{(7^2t+17)^3-111}{7^3}=\frac{7^6t^3+3.7^4.t^2.17+3.7^2.t.17^2+17^3-111}{7^3}=$$

$$=7^3t^3+3.7t^2.17+\frac{3.7^2.17^2.t+4802}{343}=7^2t^3+3.7.17.t^2+14+\frac{3.7^2.17^2.t}{7^3},$$

откуда, въ виду того, что t—число цѣлое, вытекаетъ, что и выраженіе $\frac{3.7^2.17^2.t}{7^3}=\frac{3.17^2.t}{7}$ приводится къ цѣлому числу; послѣднее условіе равносильно тому, чтобы t было кратно 7. Итакъ $t=7u$, гдѣ u—число цѣлое. Поэтому общій видъ чиселъ съ указанными въ условіи свойствами можетъ быть выраженъ формулой:

$$N=7^2.7u+17=343u+17,$$

гдѣ u—произвольное цѣлое число.

Г. Огановъ (сел. Гомадзоръ).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 29-го Ноября 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.